

## Modelo de Programación Lineal para Planeación de Requerimiento de Materiales

David Cáceres Cárdenas<sup>a</sup>, John Reyes Vásquez<sup>a</sup>, Mario García Carrillo<sup>a</sup>, Carlos Sanchez Rosero<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Unidad Operativa de Investigación y Desarrollo, Facultad de Ingeniería en Sistemas, Electrónica e Industrial, Universidad Técnica de Ambato, Ecuador  
davidc2808@gmail.com, {johnpreyes, mariogarcia, carloshsanchez}@uta.edu.ec

**Resumen:** Este artículo presenta el desarrollo de un Plan de Requerimiento de Materiales (en inglés, MRP) en una empresa de montaje de carrocerías sobre chasis, aplicando un modelo de programación entera mixta implementado en Lingo. Esta propuesta ayudará a determinar el momento más adecuado y la predicción de las cantidades indicadas de artículos necesarios en dicho proceso.

Este enfoque propone el uso de ecuaciones de programación entera mixta, orientadas a la minimización de costos, cantidad de materia prima, almacenamiento de materiales, control de niveles de rotación de materia prima y producto terminado, para satisfacer la demanda existente en dicha empresa. Dicho modelo permite conocer las cantidades exactas de inventario para satisfacer la demanda y así controlar que no existan retrasos en la producción, con esto se logra reducir 49,7% del costo de mantener inventario de materiales.

**Palabras clave:** Programación entera mixta, planeación de requerimiento de materiales, industria metalmeccánica.

**Abstract:** This paper presents the development of a Material Requirements Plan (English, MRP) in an enterprise mounting coachwork on chassis, using a mixed integer programming model implemented in Lingo. This proposal will help determine the most appropriate time and prediction of the indicated amounts of items needed in the process.

This approach proposes the use of equations of mixed integer programming oriented to minimizing costs, quantities of raw materials, storage of materials, control rotational levels of raw material and finished product to meet the demand in that company. This model allows to know the exact amounts of inventory to meet demand and thus control that there are no delays in production with this reduction is achieved 49.7% of the cost of maintaining inventory of materials.

**Keywords:** Mixed integer programming, material requirements planning, metalworking industry.

### 1 Introducción

Una adecuada planificación, buen control de la producción y suministros juega un papel fundamental en la gestión de una organización, debido a que afecta a los demás procesos de la empresa (procesos de compra, producción, mercado, etc.). Planear la producción permite programar la utilización de recursos (talento humano, máquinas, dinero) dentro de una organización. Por ello, es considerado un campo que debe abordarse principalmente desde la ingeniería industrial, para buscar la mejor forma de

asignar recursos económicos, y así minimizar los costos del plan de producción, satisfaciendo las necesidades de los clientes internos y externos para poner en marcha la producción en un período determinado de manufactura.

El abastecimiento de la materia prima es un factor importante en el proceso de producción, pero la mayoría de empresas no lleva ninguna política de inventario para abastecerse de la materia prima necesaria para la elaboración de carrocerías sobre chasis. Esto presenta un problema de altos niveles de inventario o la inexistencia de los mismos. Además de costos elevados de producción o el incumplimiento de la entrega del producto a los clientes. La manera en la que se realizan las órdenes de compra no es eficiente, lo que genera retrasos en la llegada de materiales para iniciar con la producción del día, ocasionando pérdidas económicas a la empresa.

El plan de requerimientos de material integra las actividades de producción y compras, programa las adquisiciones a proveedores en función del plan de producción. Además de ser un sistema de planificación de la producción es una gestión de inventarios que responde a las necesidades de qué es lo que se debe fabricar y/o aprovisionar. En definitiva el objetivo del MRP es brindar un enfoque más efectivo, sensible y disciplinado para determinar los requerimientos de materiales de la empresa [2].

La industria de carrocerías en el país, la conforman cerca de 74 empresas calificadas, para la producción de carrocerías de autobuses [1], y debido a su impacto en la economía local y nacional, éste trabajo pretende dar solución a dicho problema, para ello se propone un Plan de Requerimientos de Materiales (en inglés, Materials Requirement Planning, MRP). Este plan determina la cantidad de materia prima que se necesita para la elaboración de un producto final mejorando los tiempos de entrega a los clientes.

Se aborda principalmente la aplicación de un plan de requerimiento de materiales enfocado una empresa del sector industrial dedicada a la elaboración de carrocerías sobre chasis mediante la planificación del pronóstico de demanda a largo plazo (un año dividido en cuatro períodos trimestrales), posteriormente se utiliza la programación lineal como herramienta de optimización aplicando un modelo de programación lineal que busca identificar las cantidades de material adecuado con lo que se cubra las necesidades de la empresa basado en la demanda del producto y existencias en inventario.

El modelo que se propone en este artículo se basa a las necesidades de una empresa del sector carrocerero, buscando reducir costos, pedidos e inventarios, por lo que se toma éstos factores como parte de la función objetivo.

El trabajo está conformado de la siguiente manera, el análisis teórico es el cuerpo en el que se detalla la información fundamental del artículo sobre el desarrollo del modelo en la que se explican cada una de las ecuaciones, posterior se presentan los resultados obtenidos y conclusiones.

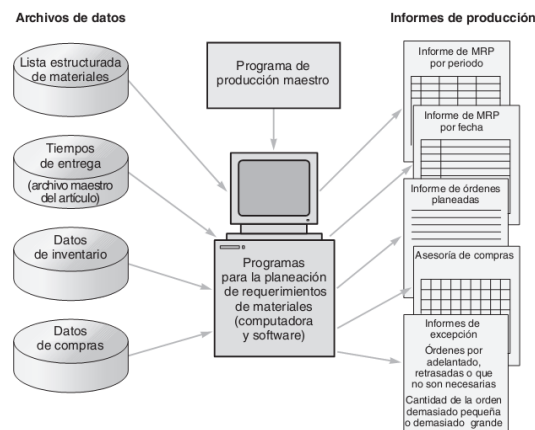
## **2 Planeación de producción, materiales y métodos**

La planeación de la producción incluye decisiones estratégicas, tácticas y operativas. Las decisiones estratégicas hacen frente a cuestiones de largo plazo, tales como distribución de las instalaciones y capacidad de planificación de recursos [3].

El plan maestro de producción (por su siglas en inglés, MPS) se caracteriza por ser una herramienta ideal para determinar de forma precisa la factibilidad de un plan basado en restricciones de capacidad agregada por medio de una comunicación directa con el cálculo de necesidades de materiales MRP [4].

Aunque la mayoría de los sistemas MRP son computarizados, su procedimiento es directo y puede hacerse en forma manual. Los componentes de un sistema de planeación de requerimientos de materiales es un programa maestro de producción, una lista estructurada de materiales, los registros de compras e inventarios, y los tiempos de entrega para cada artículo [2]. La Figura 1 muestra los distintos componentes de un MRP y los informes generados. Para usar efectivamente los modelos de inventario dependiente se requiere que el administrador de operaciones conozca:

(i) El programa de producción maestro (qué debe hacerse y cuándo). (ii) Las especificaciones o la lista estructurada de materiales necesarios para elaborar el producto. (iii) El inventario que se tiene disponible. (iv) Las órdenes de compra pendientes o recepciones esperadas. (v) Los tiempos de entrega (cuánto tiempo tardan en llegar los distintos componentes).



**Figura 1.** Estructura del Sistema MRP

Existen muchos modelos matemáticos deterministas para sistemas MRP que buscan maximizar o minimizar una función objetivo; diferentes técnicas de optimización, respondiendo al cumplimiento de unas restricciones planteadas para que los resultados del modelo sean factibles. Los modelos más importantes son los de Shapiro [5], Graves [6], Tang, Wang y Fung [7], Pochet [8], Mula, Poler y García [9], Arango, Serna y Álvarez [10], Almeder [11], Arango, Serna y Pérez [12] y Arango, Vergara y Gaviria [13]. Estos modelos se centran en la planeación de la producción y de materiales, su mayoría son problemas multiproducto, multinivel, y multiperíodo. En general la función objetivo de estos modelos busca reducir costos de producción, inventarios y capacidad. Aunque estos presentan restricciones de balance de inventarios,

restricciones de capacidad, de indicadores de producción, de no negatividad y complementarias que ayudan a la personalización de cada uno de los modelos. En lo que concierne a las variables de decisión básicamente se encuentran en común la cantidad de pedido del producto  $i$  en el período  $t$ , el tiempo extra del recurso  $k$  en el período  $t$ , la variable binaria de producción para el producto  $i$  en el período  $t$  y el inventario del artículo  $i$  al final del período  $t$ .

El estudio de estos modelos es amplio en el campo de la administración de operaciones. Para el desarrollo del modelo matemático se toma como base el modelo de programación lineal MRPDet, originalmente propuesto por Mula [9], del cual se tiene modelos derivados que ya ha sido aplicados y solucionados en otros trabajos posteriores, se citan ejemplos:

El uso de la teoría de conjuntos difusos en modelos de programación matemática permite obtener mejores resultados conjuntos en medidas de desempeño para los sistemas MRP difusos diseñados, respecto al sistema MRP determinista planteado; en especial el sistema MRPFUZZY [14].

Se logra representar un sistema real de manufactura de dos escalones mediante un modelo matemático sujeto a las restricciones de capacidad del entorno de fabricación y las condiciones propias del tipo de producto o empresa [15].

La solución obtenida en cada modelo propuesto, permitió valorar el resultado con respecto al máximo beneficio que se tendría si se estuviera en un campo determinista. Los modelos aquí presentados, son sólo un ejemplo de las diferentes aplicaciones que puede tener los conjuntos difusos y la lógica difusa para facilitar la toma de decisiones en los procesos de producción [16, 17, 18, 19].

MRPDet es un modelo para la optimización del problema de planificación a medio plazo en un entorno de fabricación MRP con restricciones de capacidad, multi-producto, multi-nivel y multi-período.

## 2.1 Formulación del modelo matemático

Para la formulación del modelo matemático lo fundamental es se definir las variables de decisión, constantes y parámetros del modelo.  $T$  representa el conjunto de períodos durante el horizonte de planificación ( $t = 1 \dots T$ ),  $I$  es el conjunto de productos ( $i = 1 \dots I$ ),  $J$  simboliza el conjunto de productos padre en la lista de materiales ( $j = 1 \dots J$ ),  $x_{it}$  es la cantidad a producir del producto  $i$  en el período  $t$ ,  $INVT_{it}$  constituye el inventario del producto  $i$  al final del período  $t$ ,  $d_{it}$  compone la demanda del producto  $i$  en el período  $t$ ,  $\alpha_{ij}$  es la cantidad requerida de  $i$  para producir una unidad del producto  $j$ ,  $TS_i$  es el tiempo de suministro del producto  $i$ ,  $INVT_{i0}$  representa el inventario del producto  $i$  en el período 0,  $E_i$  es la exactitud de inventarios = inventario real / inventario teórico y  $M$  es un valor muy grande.

Los coeficientes de costo en la función objetivo están representados por  $cp_i$  que es el costo de pedir una unidad del producto  $i$ , además de  $H_i$  que significa el costo de mantener inventario de una unidad del producto  $i$ .

En la ecuación 1 se presenta la función objetivo que busca minimizar los costos de mantenimiento de inventarios, puesto que estos pueden cambiar como resultado de las decisiones tomadas sobre las cantidades para producir o comprar de determinado

componente o producto. Se minimizan las preparaciones de pedidos de compra y órdenes de producción para maximizar la eficiencia en la planta de producción y en el proceso de compras. Se explica cada una de las ecuaciones utilizadas para la solución del problema, y seguidamente se definen las variables de decisión y parámetros del modelo.

$$\min Z = \sum_i^I \sum_t^T (T - t) * Cp_i x_{i,t} + E_i * H_i * INVT_{i,t} \quad (1)$$

La ecuación 1 tiene por objetivo principal minimizar la cantidad de los productos a pedir en un determinado periodo de tiempo, así como minimizar los costos de pedir, y los costos de mantener inventario. No se toma en cuenta los retrasos en la demanda, ni costos de tiempo irregular de trabajo, ni costos de contrato y despido de mano de obra.

$$\sum_t^T x_{i,t-TS(i)} - dem_{i,t} + E_i * INVT_{i,0} + \sum_j^I req_{i,j} * x_{i,j} \geq 0 \quad (2)$$

Para generar un balance de inventarios se utiliza la ecuación 2, donde se tiene en cuenta que los materiales a ser pedidos más las existencias de inventarios, donde estas deben ser iguales o superiores a la demanda. El factor de exactitud de inventarios de cada componente  $E_i$  permite garantizar mayor exactitud respecto a la cantidad disponible en inventarios para cada producto  $i$ . La ecuación 3 es una restricción para garantizar el tamaño del lote requerido

$$x_{i,t} \geq w_{i,t} * LS_i \quad (3)$$

$$M * w_{i,t} \geq 0 \quad (4)$$

Con la ecuación 4 se asegura que al momento de realizar un pedido, la cantidad de éste sea mayor o igual a cero.

$$INVF_i = \sum_t^T x_{i,t} + INVT_{i,0} + \sum_j^I req_{i,j} * x_{i,j} - dem_{i,t} \quad (5)$$

La restricción que calcula la cantidad de inventario que queda al final de un periodo se establece por medio de la ecuación 5. Finalmente Stock de Seguridad se lo obtiene por medio de la ecuación 6.

$$INVF_i \geq \sum_t^T x_{i,t} * PSS \quad \forall_i \neq 1 \quad (6)$$

Se utilizarán los datos del plan de producción de una empresa dedicada a la fabricación de carrocerías sobre chasis. La información de entrada para el modelo consta de la estructura básica del producto, demanda del producto final por periodo, costos de mantenimiento de inventario, costos de preparación de pedidos, entre otros. El producto

seleccionado tiene 147 componentes, incluyendo al producto terminado. Cada componente se ha nombrado como  $SKU_i$ , donde  $i$  representa el número del componente el cual varía de 1 a 147, siendo  $SKU_1$  el producto terminado.

Los pasos que se han seguido para dar la solución de éste modelo se detallan en la Figura 2 que es un diagrama de flujo de la programación del modelo en el software Lingo 10.

El modelo matemático se lo programa en el software Lingo 10, que es una herramienta de optimización diseñada para obtener la solución lineal, no lineal, cuadrática, cuadrática restringida, cono de segundo orden y modelos de optimización

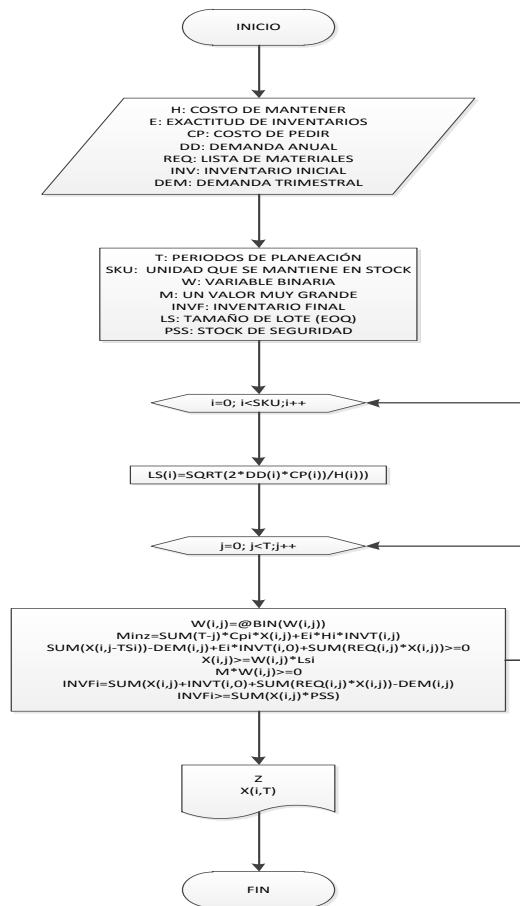


Figura 1. Diagrama de flujo del modelo matemático

## 2.2 Parametrización del modelo matemático

Para obtener los valores de las constantes del modelo, en primer lugar se realiza un pronóstico de demanda trimestral a través de una regresión lineal con tendencia y estacionalidad. Las demandas de cada SKU (en inglés, stock keeping unit) son establecidas en la variable  $d_{it}$  con un valor de 4 unidades para los siguientes cuatro trimestres.

Para obtener los costos de mantener inventario de materiales, expresado en el modelo con  $H_i$ , se realiza una clasificación ABC de inventario que permite identificar los artículos que tienen un impacto importante en un valor global, la clase A incluye artículos con 80% del valor total de stock y 20% del total de los artículos, la clase B los artículos representan 15% del valor total de stock y 30% del total y en la Clase C están los artículos que representarían 5% del valor total de stock y 50% del total. Para el caso de estudio se determina que el 88% de la inversión de la compañía está en los del tipo A, el 10% y 2% en el tipo B y C respectivamente. El valor total de inventario inicial se establece en 615, 423 USD (en inglés, United States dollar).

Los  $H_i$ , están usualmente valorados entre 15% y 20% de su costo, sin embargo se toma como referencia para la tasa de interés anual de PYMES siendo éste un valor registrado por el Banco Central del Ecuador, se agregan valores correspondientes a seguros y depreciación. Se obtiene 11% anual y solo se utiliza la materia prima clase A, de la clasificación ABC debido a que representa la mayor inversión el cual que debe aplicarse al costo de cada material.

Los costos de adquisición se originan en el gasto de hacer un pedido a un proveedor externo y está expresado por  $cp_i$  en el modelo. Como el 98% de los proveedores se encuentran dentro de la provincia de Tungurahua, la variación en el costo de pedir diferentes tipos de materiales va a ser mínima, sin embargo incluyen energía eléctrica, teléfono, papelería, uso de internet, entre otros. Finalmente se establece que cuesta 4,94 USD/orden.

La lista de las cantidades de componentes, ingredientes y materiales requeridos para hacer un producto (en inglés, BOM) para la construcción de una unidad BUS TIPO, se debe codificar y estructurar en forma jerárquica y da como resultado una matriz de 147 SKU por cuatro trimestres, que representan los periodos de adquisición de materiales. El BOM está estructurado en 3 niveles, donde nivel cero corresponde al producto final (BUS TIPO), el nivel dos lo componen las partes del BUS TIPO, aquí se encuentran todos los sub ensambles de las partes, y el nivel tres corresponde a las materias primas.

Previo a la solución, se debe definir las listas que contienen esos datos en Excel, ya sean de conjuntos primitivos, o de conjuntos derivados. La función @ OLE se utiliza para mover datos y soluciones de ida y vuelta desde Excel usando transferencias basadas OLE. Se puede utilizar @ ole en la sección conjuntos para recuperar los miembros del conjunto de Excel, o en la sección de datos para importar datos y / o soluciones de exportación.

## 3. Resultados experimentales

Los resultados arrojados por el modelo de optimización entero y lineal a través de Lingo 10, reflejan que todos los valores de  $X$  (valor de cada  $[[SKU]]_i$  en cada período  $t$ ) para los cuatro periodos planificados para  $[[SKU]]_1$  o producto final, como se presenta en la Tabla 1. Se muestra que el mínimo costo total generado por el modelo aplicado a MRP en Lingo tiene valor de 306,197.70 USD, esto representa la suma de los costos de pedir y mantener inventarios para los periodos planificados, sin embargo en los resultados las variables no presentan el costo de cada material.

**Tabla 1.** Resultados del modelo matemático en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
$X(SKU1, T1)$	1.000000	0.000000
$X(SKU1, T2)$	4.000000	0.000000
$X(SKU1, T3)$	4.000000	0.000000
$X(SKU1, T4)$	4.000000	0.000000

Seguido de eso están las sentencias  $X(SKU_i, T_j)$ ,  $SKU_i$  que representan cada uno de los ítems del BOM y  $T_j$  representa cada uno de los periodos de planeación del MRP. Se cita un ejemplo con los resultados obtenidos en la Tabla 1, donde se detalla que para el trimestre uno (T1) del ítem uno (SKU1), se deberá pedir 1 unidad

Reduced Cost representa la cantidad en que debería mejorar el coeficiente de una variable en la función objetivo, antes de que llegue a ser rentable dar a la variable en cuestión un valor. Esto se repite para cada uno de los ítems que componen el BOM, los valores obtenidos son las cantidades a pedir en cada trimestre.

Para este caso de estudio Los materiales que son claves para la continuación del proceso son:  $SKU_9$  (Tubo de acero estructural) con 273 unidades,  $SKU_{54}$  (Sicaflex adhesivo 600ml) con un pedido de 18 unidades,  $SKU_{63}$  (Lijas) con 270 unidades,  $SKU_{74}$  (Cable) con 1158 metros,  $SKU_{122}$  y  $SKU_{125}$  (bases plásticas para tubería, techo, asientos) con 42, 60, 111 y 11 unidades respectivamente. Estos valores se los toma para los dos últimos períodos que son los que más atención se debe prestar debido a las altas cantidades de materiales a ser pedidas, esto se debe a la existencia de inventarios mínimos que se va a poseer en stock.

Un análisis de sensibilidad permite determinar los intervalos en qué se ve afectada la solución óptima frente a variaciones en las condiciones iniciales que se utilizaron para plantear el problema de optimización. Lastimosamente en este modelo no se puede realizar un análisis de sensibilidad debido a que se trabaja con un modelo de programación entera.

### 3 Conclusiones

Con el modelo aquí presentado MRPDet, se constata el valor que tiene en la planificación de la producción en una empresa metalmecánica del rubro carrocerero, debido a que sí se puede lograr disminuir los niveles de inventario hasta 49,7% considerando los inventarios valorados antes y después de la optimización matemática. Realizando eficazmente pedidos de materiales y no basándose en los pronósticos



cualitativos de utilización de materia prima se logra reducir costos significativos de almacenamiento y permite tener una mayor rotación del inventario de materias primas.

Este modelo MRP es una herramienta para las industrias carroceras en general ya que ayuda a disminuir notablemente el nivel de inventario al final de materiales en cada trimestre del año, esto aumenta su liquidez y genera disponibilidad de recursos económicos. Al tener orden al momento de comprar la materia prima, se facilita a las empresas la gestión y control en los diferentes procesos, se podrán planificar eficientemente presupuestos de compra y cantidad de personal que se requieren para las operaciones.

La planificación de requerimiento de materiales desarrollada, es un aporte en general a este sector industrial, para mejorar su eficiencia en el manejo de materiales y la planificación de la cadena de suministro.

## Referencias

- [1] EPMOP. (2010) Listado de empresas calificadas para la construcción de carrocerías por parte de las Escuelas Politécnicas en base del convenio con la EMMOP-Q. [Online]. [http://www.epmmop.gob.ec/epmmop/images/stories/doc\\_gestion\\_movilidad/listado\\_carroserias\\_\(11-18-2012\).pdf](http://www.epmmop.gob.ec/epmmop/images/stories/doc_gestion_movilidad/listado_carroserias_(11-18-2012).pdf)
- [2] J. Hazer and B. Render, "Planeación de requerimientos de materiales (MRP) y ERP," in *Principios de Administración de Operaciones*. Mexico: Pearson, 2009, ch. 14, pp. 565-568.
- [3] S. A. Torabi and M. and Tanha, R. Ebadian, "Fuzzy hierarchical production planning (with a case study)," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 161, no. 11, pp. 1511-1529, Junio 2010.
- [4] S. Nahmias, *Análisis de la producción y las operaciones*. , Quinta ed. México D.F.: McGraw-Hill, 2007.
- [5] J. Shapiro, "Mathematical programming models and methods," *Operations Research Center. MIT*, p. 112, 1989.
- [6] S. Graves, "Manufacturing planning and control.," *Massachusetts Institute of Technolog*, 1999.
- [7] J. Tang and D. and Fung, R. Wang, "Fuzzy formulation for multi-product aggregate production planning," *Production Planning & Control*, vol. 78, no. 3, pp. 323-334, October 2000.
- [8] Y. Pochet, "Mathematical programming models and formula-tions for deterministic production planning problems," *Computational combinatorial optimization*, pp. 57-111, 2001.
- [9] Mula J., Poler R., and García J.P., "MRP with flexible constraints: A fuzzy mathematical," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 157, no. 1, pp. 74-97, Enero 2006.
- [10] M. D. Arango and C. A. y Álvarez, K. C. Serna, "Modelos difusos aplicados a la planeación de la producción.," *Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín*, p. 145, 2009.
- [11] C. Almeder, "A hybrid optimization approach for multi-level capacitated lot-sizing problem," *European Journal of Operational Research*, vol. 200, no. 2, pp. 599-606, January 2010.
- [12] M. D. Arango and C. A. and Pérez, G. Serna, "Fuzzy mathematical programming applied to the material requirements planning (MRP)," *Revista Técnica de la Facultad de Ingeniería-Universidad de Zulia*, vol. 33, no. 1, pp. 77-86, Abril 2010.
- [13] M. D. Arango and C. y Gaviria, H. Vergara, "Modelización difusa para la planificación agregada de la producción en ambientes de incertidumbre," *Dyna*, vol. 162, pp. 397-409, Junio 2010.
- [14] Ing. José Alejandro Cano Arenas, "Modelo de un Sistema MRP Cerrado Integrando Incertidumbre en los Tiempos de Entrega, Disponibilidad de la Capacidad de Fabricación e Inventarios," Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Magister Tesis 2011.
- [15] H. L. Delgado and Toro D. H., "Aplicación de un modelo de programación lineal en la optimización de un sistema de planeación de requerimientos de materiales (MRP) de dos

- escalones con restricciones de capacidad," *Ingeniería e Investigación*, vol. 30, no. 1, pp. 168-173, Abril 2010.
- [16] Ing. Conrado Augusto Serna Urán, "Desarrollo de Modelos de Programación Matemática Fuzzy Para la Planificación de la Producción en Contextos de Incertidumbre un Caso Aplicado a la Industria Automotriz," Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Magister Tesis 2009.
- [17] J. Mula Bru, R. Póler Escoto, D. Peidro, and J. Verdegay, "Fuzzy optimization for supply chain planning under supply, demand and process uncertainties," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 160, no. 18, pp. 2640-2657, Septiembre 2009.
- [18] J. Mula Bru, D. Peidro, M. Jiménez, and M. Botella, "A fuzzy linear programming based approach for tactical supply chain planning in an uncertainty environment," *European Journal of Operational Research*, vol. 205, no. 1, pp. 65-80, Agosto 2010.
- [19] J.O. McClain, L.J. Thomas, P.J. Billington, "Mathematical programming approaches to capacity constrained MRP systems: Review, formulation and problem reduction," *Northeastern University, U.S.A, Revista Científica Volumen 29*, pp. 1126-1141, 1983.